Aproximación de π

Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia se tiene:

$\boldsymbol{n}$	**perímetro/diámetro**
3	$3\sqrt{3}/2$
6	3
12	$6\sqrt{2-\sqrt{3}}$
24	$12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
$\vdots$	$\vdots$
$3 \cdot 2^k$	$3 \cdot 2^{k-1}\sqrt{2-a_k}$
$\vdots$	$\vdots$
∞	π

$\boldsymbol{n}$	**perímetro/diámetro**
4	$2\sqrt{2}$
8	$4\sqrt{2-\sqrt{2}}$
16	$8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
32	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
$\vdots$	$\vdots$
2^{k+2}	$2^{k+1}\sqrt{2-b_k}$
$\vdots$	$\vdots$
∞	π

$\boldsymbol{n}$	**perímetro/diámetro**
5	$5\sqrt{(5-\sqrt{5})/2/2}$
10	$5\sqrt{2-\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}}$
20	$10\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}}}$
40	$20\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}}}}$
$\vdots$	$\vdots$
$5 \cdot 2^k$	$5 \cdot 2^{k-1}\sqrt{2-c_k}$
$\vdots$	$\vdots$
∞	π

En dónde,

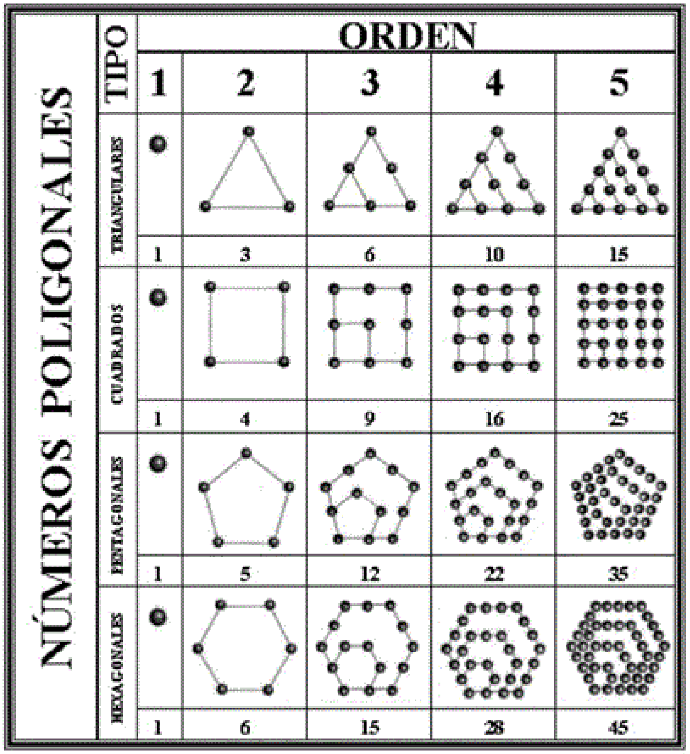
$$a_k = \begin{cases} -1, & k = 0 \\ \sqrt{2+a_{k-1}}, & k > 0 \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \sqrt{2+b_{k-1}}, & k > 0 \end{cases} \qquad c_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}-1}{2}, & k = 0 \\ \sqrt{2+c_{k-1}}, & k > 0 \end{cases}$$

Además,

$$\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k} = \frac{\sqrt{2-a_k}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{2^{k+2}} = \frac{\sqrt{2-b_k}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{5\cdot 2^k} = \frac{\sqrt{2-c_k}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^k} = \frac{\sqrt{2+a_k}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{2^{k+2}} = \frac{\sqrt{2+b_k}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{5\cdot 2^k} = \frac{\sqrt{2+c_k}}{2}$$

Números poligonales (sucesión)



Representación de los número triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

Número de lados	Diferencia de términos consecutivos $\boldsymbol{a_k - a_{k-1}}$ $\boldsymbol{(k > 1)}$
3	$2 + (k-2)$
4	$3 + 2(k-2)$
5	$4 + 3(k-2)$
6	$5 + 4(k-2)$
$\vdots$	$\vdots$
m	$(m-1) + (m-2)(k-2)$

Por consiguiente, si $a_1 = 1$ para $m > 2$, entonces:

$$a_n = \frac{n}{2}\big(m(n-1) - 2(n-2)\big)$$